SUR L'AVANTAGE DU BANQUIER AU JEU DE PHARAON.

PAR M. EULER.

Pour rendre la recherche plus générale, je marquerai le nombre des Cartes que le Banquier a en main par la lettre n. Parmi ces cartes, il y en aura ou une ou deux ou trois ou quatre ſemblables à celle ſur laquelle le Ponte aura mis. Je nommerai ces cartes *ſignifiantes* pour les diſtinguer des autres, dont l'eſpece n'entre pas en conſidération. Quoique le nombre des cartes ſignifiantes ne ſurpaſſe pas quatre, pour rendre le calcul plus complet, je paſſerai à des nombres plus grands; un tel cas pourroit avoir lieu, ſi par exemple le Ponte mettoit ſans diſtinction ſur un Roi ou une Dame à la fois, de ſorte qu'il gagne ou perde, ſoit qu'un Roi ou une Dame ſorte la premiere; dans ce cas le nombre des cartes ſignifiantes pourroit monter jusqu'à huit. J'aurai donc autant de cas à examiner, qu'il y a de cartes ſignifiantes, & je déterminerai pour chacun l'avantage du Banquier: pour cet effet je marquerai par l'unité la miſe du Ponte, & je chercherai la prétention que le Banquier y pourra faire conformément aux regles de la probabilité. Car, ſi le jeu étoit égal, le Banquier n'y ſauroit former aucune prétention; & ce n'eſt qu'à cauſe de ſon avantage, qu'il peut pretendre à une certaine partie.

PROBLEME I.

1. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, s'il n'y a qu'une ſeule carte ſignifiante, trouver l'avantage du Banquier.

SOLU-

SOLUTION.

Que le Banquier tire une carte après l'autre, & la probabilité que la premiere Carte soit la signifiante, est $\frac{1}{n}$, & qu'elle ne la soit pas, la probabilité sera $\frac{n-1}{n}$. Au premier cas il gagne la mise $= 1$, ce qui vaut $\frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}$, au second cas il faut passer outre. Supposant donc que l'avantage du Banquier, quand il va tirer la seconde carte, lui vaille a; & puisque la probabilité que ce cas arrive est $\frac{n-1}{n}$, son avantage au commencement est $x = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}a$, posant x pour l'avantage du Banquier au commencement du jeu. Maintenant, pour trouver a, je considere la seconde carte, & à cause du nombre des cartes $= n - 1$, la probabilité que la seconde carte soit la signifiante, est $\frac{1}{n-1}$, & qu'elle ne la soit pas, $= \frac{n-2}{n-1}$, là il perd 1, & ici il passe à l'esperance, qu'il aura à la troisieme carte, laquelle soit posée $= b$, de là nous aurons $a = -\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \cdot b$, & partant $x = \frac{n-2}{n} \cdot b$. Qu'il tire à présent la troisieme carte, & pour qu'elle soit la signifiante, la probabilité est $\frac{1}{n-2}$, & qu'elle ne la soit pas, $= \frac{n-3}{n-2}$: le premier cas lui fait gagner 1, & l'autre le met à l'espérance qu'il aura à la quatrieme carte, laquelle soit $= c$; d'où nous aurons $b = \frac{1}{n-2} + \frac{n-3}{n-2} c$, & partant $x = \frac{1}{n} + \frac{n-3}{n} c$. Qu'il tire la quatrieme carte, & la pro-

probabilité qu'elle ſoit la ſignifiante étant $= \frac{1}{n-3}$, & qu'elle ne la ſoit pas $= \frac{n-4}{n-3}$; il perdra 1 dans le premier cas, & dans l'autre, il obtient l'eſpérance qu'il peut avoir à la cinquieme, laquelle ſoit $= d$: de là nous aurons $c = -\frac{1}{n-3} + \frac{n-4}{n-3} d$, & $x = \frac{n-4}{n} d$. De la même maniere ſi nous poſons

	l'eſpérance du Banquier
au commencement	$= x$.
à la ſeconde carte	$= a$.
à la troiſieme carte	$= b$.
à la quatrieme carte	$= c$.
à la cinquieme carte	$= d$.
à la ſixieme carte	$= e$. &c.

nous aurons les valeurs ſuivantes.

$$x = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} a; \qquad x = \frac{n-2}{n} b;$$

$$x = \frac{1}{n} + \frac{n-3}{n} c; \qquad x = \frac{n-4}{n} d;$$

$$x = \frac{1}{n} + \frac{n-5}{n} e; \qquad x = \frac{n-6}{n} f; \quad \&c.$$

Mais il faut remarquer que le nombre de toutes les cartes n eſt pair, & que le Banquier ne perd rien, quand la carte ſignifiante eſt la derniere, quoiqu'elle ſoit paire en ordre. Donc, s'il étoit $n = 2$, il ſeroit $a = 0$; ſi $n = 4$, il ſeroit $c = 0$; ſi $n = 6$, il ſeroit $e = 0$, & ainſi de ſuite: d'où l'on voit qu'il y aura en général $x = \frac{1}{n}$, quelque nombre pair que ſoit n.

Remar-

Remarque I.

2. Il eſt évident que cet avantage du Banquier $x = \frac{1}{n}$, vient uniquement de la loi, que la derniere carte ne fait pas gagner au Ponte: car, ſi ſans cette exception toutes les cartes paires lui étoient favorables, comme toutes les impaires le ſont au Banquier, le parti ſeroit parfaitement égal, & l'avantage de celui-ci ſeroit $x = 0$.

Remarque II.

3. Cette ſeule conſidération m'auroit pu d'abord conduire à la ſolution du probleme. Car, puiſque la probabilité que la carte ſignifiante ſoit la derniere, eſt $= \frac{1}{n}$, & que dans ce cas le Banquier ne perd pas 1, comme il devroit, ſi le parti étoit égal, il eſt autant que ſi ce cas lui rapportoit 1, outre l'égalité; d'où ſon avantage eſt eſtimé $x = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}$.

Remarque III.

4. Puiſqu'un entier jeu de cartes, qui en contient 52, renferme quatre cartes ſignifiantes, ce cas ne ſauroit avoir lieu, que lorſque la taille eſt déjà diminuée au deſſous de 49 cartes. Mais, puiſqu'on tire les cartes toujours deux à deux, le nombre des cartes, dans ce cas, n ſera 48 tout au plus, ou quelqu'autre nombre pair plus petit. Donc, le plus petit avantage du Banquier dans ce cas, qu'il aura quand $n = 48$, ſera $= \frac{1}{48}$, ou vaudra un peu plus que deux pour 100: & ſi le Banquier n'avoit plus que 10 cartes en main, ſon avantage vaudroit $\frac{1}{10}$ ou 10 pour cent.

PROBLEME II.

5. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, s'il y a deux cartes ſignifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

Soit x l'avantage du Banquier au commencement du jeu, & puisqu'il tire les cartes deux à deux, ſoit a ſon avantage, après qu'il aura tiré deux cartes, (ſuppoſé qu'aucune des cartes ſignifiantes ne ſoit ſortie), & b celui après qu'il aura tiré 4 cartes, c celui après qu'il aura tiré 6, d celui après qu'il aura tiré 8, & ainſi de ſuite jusqu'à la fin. Maintenant, pour la premiere paire de cartes, il faut conſiderer 4 cas.

1°. lorsque la premiere & la ſeconde ſont ſignifiantes, où le jeu finit, & le Banquier gagne la moitié de la miſe, ou $\frac{1}{2}$, ſelon les regles du jeu.

2°. lorsque la premiere eſt ſignifiante, & l'autre non; dans ce cas le Banquier gagne toute la miſe 1.

3°. lorsque la premiere n'eſt pas ſignifiante, mais que la ſeconde eſt ſignifiante: dans ce cas le Banquier perd 1.

4°. lorsque ni la premiere ni la ſeconde n'eſt ſignifiante; dans ce cas on continue le jeu, & le Banquier arrive à l'avantage que j'ai marqué par la lettre a.

Or, puisqu'il y a 2 cartes ſignifiantes parmi toutes dont le nombre eſt n, la probabilité que la premiere ſoit ſignifiante eſt $= \frac{2}{n}$, & qu'elle ne le ſoit pas, $= \frac{n - 2}{n}$.

Soit la premiere ſignifiante; & puisque dans le reſte des cartes, dont le nombre eſt $n - 1$, il n'y a plus qu'une ſignifiante, la probabilité qu'elle ſoit la ſeconde, eſt $= \frac{1}{n - 1}$, & qu'elle ne le ſoit pas, $= \frac{n - 2}{n - 1}$: donc, pour que le premier cas arrive, la probabilité

eſt

eſt $= \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$, & que le ſecond arrive la probabilité eſt $= \frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1}$.

Que la premiere ne ſoit pas ſignifiante; & puiſqu'il y a encore 2 cartes ſignifiantes parmi les autres, dont le nombre $n - 1$, la probabilité que la ſeconde ſoit ſignifiante eſt $= \frac{2}{n-1}$, & qu'elle ne le ſoit pas, $= \frac{n-3}{n-1}$. Donc qu'il arrive

le troiſieme cas, la probabilité eſt $= \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$.

le quatrieme cas, la probabilité eſt $= \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$.

La probabilité de l'arrivée de ces quatre cas, avec le profit ou la perte que chacun apporte au Banquier, eſt donc.

$$x = \frac{2}{n(n-1)} \cdot \tfrac{1}{2} + \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \cdot 1 + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} a,$$

ou bien $x = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} a$.

De la même maniere nous trouverons l'avantage du Banquier a, qu'il aura après avoir déjà tiré 2 cartes; car, ayant alors encore $n - 2$ cartes, parmi leſquelles ſe trouvent deux ſignifiantes, mettant $n - 2$ au lieu de n, & b au lieu de a nous aurons:

$$a = \frac{1}{(n-2)(n-3)} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)} b,$$

& continuant le même raiſonnement nous trouverons

$$b = \frac{1}{(n-4)(n-5)} + \frac{(n-6)(n-7)}{(n-4)(n-5)}\, c,$$

$$c = \frac{1}{(n-6)(n-7)} + \frac{(n-8)(n-9)}{(n-6)(n-7)}\, d,$$

$$d = \frac{1}{(n-8)(n-9)} + \frac{(n-10)(n-11)}{(n-8)(n-9)}\, e.$$

&c.

Mais il faut ici avoir égard à une exception, que les regles du jeu renferment, qui eſt, que lorſque les deux cartes ſignifiantes ſont les dernieres, le Banquier gagne la miſe toute entiere, & non pas ſeulement la moitié, comme il arrive lorſque les deux cartes ſignifiantes ſe rencontrent dans une autre paire quelconque. Or la probabilité que les deux cartes ſignifiantes ſoient les dernieres étant $= \frac{2}{n(n-1)}$, & ce cas lui rapportant un gain d' $\frac{1}{2}$ au deſſus de l'ordinaire, nous n'aurons qu'à ajouter encore $\frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n(n-1)}$, à l'avantage, que nous fourniſſent les déterminations précédentes.

Subſtituons donc ſucceſſivement les valeurs trouvées pour a, b, c, d, &c. & nous trouverons:

$$x = \frac{1 + 1 + (n-4)(n-5)\, b}{n(n-1)},$$

$$x = \frac{1 + 1 + 1 + (n-6)(n-7)\, c}{n(n-1)},$$

$$x = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + (n-8)(n-9)\, d}{n(n-1)},$$

&c.

Donc

Donc, s'il étoit $n = 4$, nous aurions $x = \frac{2}{n(n-1)}$; s'il étoit $n = 6$, nous aurions $x = \frac{3}{n(n-1)}$; s'il étoit $n = 8$, nous aurions $x = \frac{4}{n(n-1)}$, &c. & partant en général quelque nombre pair que puisse être n, nous aurons

$$x = \frac{n:2}{n(n-1)} = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Nous n'avons donc qu'a ajouter l'avantage qui résulte du cas, lorsque les deux cartes signifiantes sont les dernieres, & nous obtiendrons l'avantage entier du Banquier

$$x = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n+2}{2n(n-1)}.$$

Remarque I.

6. Lorsque parmi les n cartes il n'y a qu'une seule carte signifiante, l'avantage du Banquier vaut $\frac{1}{n} = \frac{2n-2}{2n(n-1)}$: donc, à moins que n ne soit 4 ou deux, l'avantage du Banquier est plus grand, lorsqu'il n'y a qu'une carte signifiante que lorsqu'il y en a deux.

Remarque II.

7. Il est donc au contraire plus profitable pour le Ponte qu'il y ait encore deux cartes signifiantes dans la taille, pourvu que la taille contienne encore plus de 4 cartes.

Remarque III.

8. Ce cas peut avoir lieu lorsque $n = 50$, & alors l'avantage du Banquier sera $\frac{52}{100 \times 49} = \frac{13}{1225}$, ou vaudra un peu plus qu'un

pour

pour 100. Mais, si le nombre des cartes n n'étoit que 10, son avantage seroit $\frac{12}{20 \times 9} = \frac{1}{15}$, ou vaudroit presque 7 pour Cent.

PROBLEME III.

9. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, s'il y a trois cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

Posant l'avantage cherché du Banquier $= x$, & que $a, b, c, d,$ &c. marquent ses avantages, qu'il aura après avoir tiré 2, 4, 6, 8, &c. cartes; nous aurons à considérer les mêmes quatre cas, qui sont exposés dans la solution du second probleme.

Donc, puisqu'il y a 3 cartes signifiantes parmi n cartes, la probabilité que la premiere tirée soit signifiante, sera $= \frac{3}{n}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 3}{n}$.

Soit la premiere signifiante; & puisqu'il y en a encore 2 parmi $n - 1$ cartes, la probabilité que la seconde soit signifiante sera $\frac{2}{n - 1}$; & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 3}{n - 1}$: donc, qu'il arrive

le premier cas, la probabilité est $= \frac{3 \cdot 2}{n(n - 1)}$,

le second cas, la probabilité est $= \frac{3(n - 3)}{n(n - 1)}$.

Or, si la premiere n'est pas signifiante, puisque parmi les $n - 1$ cartes restantes il y a 3 cartes signifiantes, la probabilité que la seconde soit signifiante, est $= \frac{3}{n - 1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 4}{n - 1}$.

Donc

Donc pour qu'il arrive

le troisieme cas, la probabilité eſt $= \frac{3(n-3)}{n(n-1)}$,

le quatrieme cas, la probabilité eſt $= \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$,

De là nous concluons l'avantage du Banquier

$$x = \frac{3.2}{n(n-1)} \cdot \tfrac{1}{2} + \frac{3(n-3)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{3(n-3)}{n(n-1)} n + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} a,$$

ou bien $x = \frac{3 + (n-3)(n-4)a}{n(n-1)}$.

Par un raiſonnement tout ſemblable nous déterminerons la valeur de a, en poſant le nombre des cartes $= n - 2$;

$a = \frac{3 + (n-5)(n-6)b}{(n-2)(n-3)}$, & enſuite

$b = \frac{3 + (n-7)(n-8)c}{(n-4)(n-5)}$,

$c = \frac{3 + (n-9)(n-10)d}{(n-5)(n-7)}$, &c.

Subſtituons ces valeurs trouvées, & nous en tirerons:

$$x = \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3(n-4)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)} b,$$

$$x = \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3(n-4)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{3(n-6)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)} c,$$

&c.

& pourſuivant ces ſubſtitutions jusqu'à la fin:

$$x = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} ((n-2) + (n-4) + (n-6) + (n-8) + \ldots\ldots 0),$$

 nous

nous avons donc une progreſſion arithmétique à ſommer, dont le nombre des termes eſt $\frac{n}{2}$, & la ſomme du premier & dernier $= n - 2$, d'où la ſomme de la progreſſion eſt $= \frac{n(n-2)}{4}$, & partant $x = \frac{3}{4(n-1)}$. C'eſt auſſi la véritable valeur de l'avantage du Banquier, puiſque le cas irrégulier des deux dernieres cartes ne ſauroit ici avoir lieu. Donc l'avantage cherché du Banquier eſt dans ce cas en général $x = \frac{3}{4(n-1)}$.

Remarque I.

10. Si parmi les n cartes il n'y en a qu'une ſignifiante, l'avantage du Banquier eſt $= \frac{1}{n}$, & s'il n'y a que deux, ſon avantage eſt $= \frac{n+2}{2n(n-1)}$: Donc, ſelon qu'il y a une, ou deux, ou trois cartes ſignifiantes, l'avantage du Banquier ſuit le rapport de ces trois nombres: $4n - 4$; $2n + 4$; $3n$. Donc, pourvu qu'il ſoit $n > 4$, l'avantage du Banquier eſt le plus petit, lorsque la taille contient encore deux cartes ſignifiantes.

Remarque II.

11. Or, ſi $n > 4$, l'avantage du Banquier eſt plus grand, ſi la taille contient une carte ſignifiante, que ſi elle en contient trois. Donc, le nombre des cartes de la taille demeurant le même, le Ponte agira le plus avantageuſement lorsqu'il met ſur une carte qui ſe trouve encore deux fois dans la taille.

Remarque III.

12. Lorsque la taille contient trois cartes ſignifiantes, l'avantage du Banquier eſt d'autant plus petit, plus le nombre des cartes eſt grand.

grand. Le plus petit avantage ſera donc, lorſque $n = 50$, qui vaut $\frac{3}{4 \times 49} = \frac{3}{196}$, ou $1\frac{1}{2}$ pour cent à peu près. Lorſque la taille ne contient plus que 10 cartes, l'avantage du Banquier ſera $= \frac{3}{4 \times 9} = \frac{1}{12}$, ou $8\frac{1}{3}$ pour cent.

PROBLEME IV.

13. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a quatre cartes ſignifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

En opérant de la maniere précédente; puiſqu'il y a 4 cartes ſignifiantes, la probabilité que la premiere tirée en ſoit une ſera $\frac{4}{n}$, & qu'elle ne le ſoit pas, $= \frac{n - 4}{n}$.

Soit donc la premiere ſignifiante, & puiſqu'il y en a encore 3 parmi les $n - 1$ cartes reſtantes, la probabilité que la ſeconde ſoit ſignifiante, eſt $\frac{3}{n - 1}$, & qu'elle ne le ſoit pas, $= \frac{n - 4}{n - 1}$.

Donc, pour qu'il arrive

le premier cas, la probabilité eſt $= \frac{4 \times 3}{n(n - 1)}$,

le ſecond cas, la probabilité eſt $= \frac{4(n - 4)}{n(n - 1)}$.

Or, ſi la premiere n'eſt pas ſignifiante, puiſqu'il y en a encore 4 parmi les $n - 1$ reſtantes, la probabilité que la ſeconde ſoit ſignifiante eſt $= \frac{4}{n - 1}$, & qu'elle ne le ſoit pas, $= \frac{n - 5}{n - 1}$.

Donc

Donc, pour qu'il arrive

le troisieme cas, la probabilité est $= \frac{4(n-4)}{n(n-1)}$,

le quatrieme cas, la probabilité est $= \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}$

De là nous concluons:

$$x = \frac{12}{n(n-1)} \cdot \tfrac{1}{2} + \frac{4(n-4)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{4(n-4)}{n(n-1)} \cdot 1 + \frac{(n-4)(n-5)a}{n(n-1)},$$

ou bien $x = \frac{6}{n(n-1)} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}a$,

& de la même maniere:

$$a = \frac{6 + (n-6)(n-7)b}{(n-2)(n-3)},$$

$$b = \frac{6 + (n-8)(n-9)c}{(n-4)(n-5)},$$

$$c = \frac{6 + (n-10)(n-11)d}{(n-6)(n-7)},$$

&c.

De là nous tirerons la valeur de x cherchée:

$$x = \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)}((n-2)(n-3) + (n-4)(n-5) + (n-6)(n-7) + \ldots\ldots 0).$$

Cette progression étant algébrique, si nous en cherchons la somme par les regles connues, nous la trouvons $= \frac{n(n-2)(2n-5)}{12}$, & partant l'avantage du Banquier sera:

$$x = \frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}.$$

L'AVAN-

L'AVANTAGE DU BANQUIER

vaut autant pour cent, que la table suivante montre.

Nombre de toutes les Cartes.	Pour une Carte signifiante.	Pour deux Cartes signifiantes.	Pour trois Cartes signifiantes.	Pour quatre Cartes signifiantes.
2	50, 000	100, 000	*	*
4	25, 000	25, 000	25, 000	50, 000
6	16, 667	13, 333	15, 000	23, 333
8	12, 500	8, 929	10, 714	15, 714
10	10, 000	6, 667	8, 333	11, 905
12	8, 333	5, 303	6, 818	9, 596
14	7, 143	4, 395	5, 769	8, 042
16	6, 250	3, 750	5, 000	6, 923
18	5, 556	3, 268	4, 412	6, 078
20	5, 000	2, 895	3, 947	5, 418
22	4, 545	2, 597	3, 571	4, 887
24	4, 167	2, 355	3, 261	4, 451
26	3, 846	2, 154	3, 000	4, 087
28	3, 571	1, 984	2, 778	3, 777
30	3, 333	1, 839	2, 586	3, 512
32	3, 125	1, 714	2, 419	3, 272
34	2, 941	1, 604	2, 273	3, 078
36	2, 778	1, 508	2, 143	2, 901
38	2, 632	1, 422	2, 027	2, 741
40	2, 500	1, 346	1, 923	2, 599
42	2, 381	1, 277	1, 829	2, 470
44	2, 273	1, 216	1, 744	2, 354
46	2, 174	1, 160	1, 667	2, 248
48	2, 084	1, 108	1, 596	2, 151
50	*	1, 061	1, 531	2, 061
52	*	*	*	1, 981

Remar-

Remarque I.

14. En considérant cette Table, on peut donner aux Pontes cette regle, afin qu'ils risquent le moins. *Qu'ils attendent jusqu'à ce que deux cartes d'une espece soient sorties, & aussitôt que cela est arrivé, qu'ils choisissent cette carte pour leur mise.*

Remarque II.

15. Le cas le plus avantageux pour les Pontes est donc, lorsque le Banquier tire au premier coup deux cartes semblables, de sorte qu'il lui reste encore 50 Cartes dans la main. Car alors quand le Ponte met sur cette carte, l'avantage du Banquier sera le plus petit possible.

Remarque III.

16. Cependant s'il n'arrivoit pas, que deux cartes semblables sortissent avant que le Banquier eut tiré 16 cartes, il vaudroit autant, que le Ponte mette d'abord au second coup, sur une carte qui seroit sortie au premier coup: mais, comme il n'y a que 13 cartes de chaque espece, ce cas ne sauroit arriver.

Remarque IV.

17. Quand le Banquier n'a plus que 28 cartes dans la main, où encore moins, il n'est plus à propos de mettre sur une carte quoiqu'elle ne se trouve que 2 fois dans la taille. Il vaudra mieux d'attendre que le Banquier recommence, & de mettre alors sur une carte quelconque; mais le plus seur moyen est toujours d'attendre encore alors le second coup, & de mettre sur une carte qui sera sortie au premier.

Remarque V.

18. C'est encore une regle fort essentielle pour les Pontes, qu'ils ne mettent jamais sur une carte, qu'elle qu'elle soit, lorsque la taille a déjà fort diminué. Il n'est aussi jamais bon, de mettre sur une carte qui ne se trouve plus qu'une seule fois dans la taille. Car, quand

quand même cela arriveroit déjà au troisieme coup, le Banquier auroit plus que 2 pour cent d'avantage sur lui. Or un prudent Ponte peut toujours faire en sorte que l'avantage du Banquier surpasse à peine un pour cent.

PROBLEME V.

18. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a cinq cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

Posant l'avantage cherché du Banquier $= x$, & faisant le même raisonnement comme auparavant, on parviendra enfin à cette équation :

$$x = \frac{10((n-2)(n-3)(n-4)+(n-4)(n-5)(n-6)+(n-5)(n-6)(n-7)+\ldots\ldots+0)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

Or la somme de la progression, qui fait ici partie du numérateur, se trouve $= \frac{n\ (n-2)^2\ (n-4)}{8}$, d'où nous tirons l'avantage du Banquier $x = \frac{5\ (n-2)}{4\ (n-1)\ (n-3)}$.

PROBLEME VI.

20. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a six cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

Pour trouver cet avantage, que je nomme $= x$, on parvient à cette progression :

$$s = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)+\ldots\ldots+0,$$

dont on trouve la valeur

$$s = \frac{n(n-2)\ (n-4)\ (2nn-13n+16)}{20},$$

&

& celle de x sera

$$x = \frac{15s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}.$$

Par conséquent l'avantage du Banquier sera:

$$x = \frac{3(2nn - 13n + 16)}{4(n-1)(n-3)(n-5)}.$$

PROBLEME VII.

21. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a 7 cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

On parviendra à cette équation

$$x = \frac{21s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)},$$

& $s=(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+(n-4)\ldots.(n-8)+\ldots\ldots+0,$

Or la somme est $s = \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(2nn-12n+13)}{24}.$

Donc: $x = \frac{7(2nn - 12n + 13)}{8(n-1)(n-3)(n-5)}$: ce qui est l'avantage du Banquier.

PROBLEME VIII.

22. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a 8 cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

Maintenant il s'agit de trouver la somme de cette progression:

$s=(n-2)\ldots..(n-7)+(n-4)\ldots.(n-9)+(n-6)\ldots.(n-11)+\ldots..+0,$

Or les regles connues nous fournissent cette somme:

$s=\frac{1}{12}n(n-2)(n-4)(n-6)(4n^3-50nn+176n-151),$

&

& alors on aura:

$$x = \frac{28s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}$$

Par conséquent l'avantage du Banquier sera:

$$x = \frac{4n^3 - 50nn + 176n - 151}{2(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}.$$

Remarque I.

23. Si l'on veut aller plus loin, & supposer le nombre des cartes signifiantes plus grand, tout revient à la sommation de semblables progressions, qui étant algebriques, on n'a qu'à faire l'application des régles connues pour en trouver la somme.

Remarque II.

24. Pour mettre devant les yeux tout ce que nous venons de trouver, en marquant le nombre de toutes les cartes par n, on a

l'avantage du Banquier.

Pour 1 Carte signifiante - $\frac{1}{n}$,

Pour 2 Cartes signifiantes - $\frac{n+2}{2n(n-1)}$,

Pour 3 Cartes signifiantes - $\frac{3}{4(n-1)}$,

Pour 4 Cartes signifiantes - $\frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}$,

Pour 5 Cartes signifiantes - $\frac{5n-10}{4(n-1)(n-3)}$,

Pour 6 Cartes signifiantes - $\frac{3(2nn-13n+16)}{4(n-1)(n-3)(n-5)}$,

Pour 7 Cartes signifiantes - $\frac{7(2nn-12n+13)}{8(n-1)(n-3)(n-5)}$,

Pour 8 Cartes signifiantes - $\frac{4n^3-50nn+176n-151}{2(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}$.

Re-

Remarque III.

25. Il eſt difficile de découvrir une loi dans ces expreſſions; auſſi n'en faut il pas chercher parmi toutes, puisque la premiere & la ſeconde ſont aſſujetties à des irrégularités, qui n'ont pas lieu dans les ſuivantes. Or, ſi nous negligeons ces anomalies des cas d'une & deux cartes ſignifiantes, l'avantage ſe trouve au premier $= 0$, & au ſecond $= \frac{1}{2(n-1)}$; & ce ſont les formules, qui avec les ſuivantes doivent obſerver une certaine loi de progreſſion.

Remarque IV.

26. Quelque embrouillée que paroiſſe cette loi, elle paroitra aſſés clairement, ſi nous décompoſons les fractions trouvées en des fractions ſimples ſelon les facteurs du dénominateur de chacune. Par ce moyen on changera ces expreſſions dans les ſuivantes:

N. des Cartes ſign.	Avantage du Banquier
. . . . .	0
. . . . .	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1}$
3	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{n-1}$
4	$\frac{1}{8}\left(\frac{6}{n-1} + \frac{2}{n-3}\right)$
5	$\frac{1}{16}\left(\frac{10}{n-1} + \frac{10}{n-3}\right)$
6	$\frac{1}{32}\left(\frac{15}{n-1} + \frac{30}{n-3} + \frac{3}{n-5}\right)$
7	$\frac{1}{64}\left(\frac{21}{n-1} + \frac{70}{n-3} + \frac{21}{n-5}\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(\frac{28}{n-1} + \frac{140}{n-3} + \frac{84}{n-5} + \frac{4}{n-7}\right).$

En

En considérant ces formules, on y découvrira aisément la loi de la progression, & posant en général le nombre des cartes signifiantes $= \nu$, le nombre de toutes les cartes étant, $= n$ l'avantage du Banquier sera:

$$\frac{1}{2^{\nu-1}}\left(\frac{\nu(\nu-1)}{1.\ 2}.\frac{1}{n-1}+\frac{2\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\frac{1}{n-3}+\frac{3\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}.\frac{1}{n-5}+\text{etc.}\right),$$

qui se change en celle-ci:

$$\frac{\nu}{2^{\nu}}\left(\frac{\nu-1}{1(n-1)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3\ (n-3)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ (n-5)}+\&c.\right).$$

PROBLEME GÉNÉRAL.

27. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, si le nombre des cartes signifiantes est $= \nu$, trouver l'avantage du Banquier

SOLUTION.

Nous venons de voir que l'avantage du Banquier sera:

$$\frac{\nu}{2^{\nu}}\left(\frac{\nu-1}{1(n-1)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3\ (n-3)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ (n-5)}+\&c.\right),$$

excepté les cas, où l'on a $\nu = 1$, ou $\nu = 2$. Or, si nous considérons cette progression, nous verrons aisément, qu'elle peut être renfermée dans une expression finie intégrale.

$$\frac{\nu}{2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-1}dz\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\nu-1}-\int z^{n-1}dz\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\nu-1}\right).$$

Car, ayant pris ces integrales en sorte qu'elles évanouissent posant $z = 0$, on n'a qu'à mettre ensuite $z = 1$.

En observant cette regle dans les intégrations, l'avantage du Banquier pourra aussi être exprimé en sorte:

$$\frac{\nu}{2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-\nu}dz\,(z+1)^{\nu-1}-\int z^{n-\nu}dz\,(z-1)^{\nu-1}\right),$$

posant après l'intégration $z = 1$. On voit d'abord que cette formule

X 2

mule ne sauroit avoir lieu, à moins qu'il ne soit $n > \nu$, puisqu'on ne sauroit rendre l'intégrale $= 0$, au cas $z = 0$, ce qui est conforme à la nature de la question.

Remarque I.

28. Suivant la méthode directe nous aurions eu à sommer cette progression :

$$s = (n-2)\ldots\ldots(n-\nu+1) + (n-4)\ldots\ldots(n-\nu-1) + \ldots\ldots + 0,$$

& l'avantage du Banquier auroit été:

$$x = \frac{\nu(\nu-1)s}{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\nu+1)}.$$

Donc, réciproquement, on obtiendra la somme de la progression:

$$s = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\nu+1)}{(\nu-1)2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-\nu}dz(z+1)^{\nu-1} - \int z^{n-\nu}dz(z-1)^{\nu-1}\right),$$

Remarque II.

29. Or, posant $n - 2 = 2t$, ou $n = 2t + 2$, la quantité s marque la somme d'une progression algébrique, dont le terme général, ou celui qui répond à l'exposant t, est

$$T = 2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)\ldots\ldots(2t-\nu+3).$$

Et partant nous pourrons assigner la somme S. T qui convient à ce terme général, par l'expression intégrale suivante.

$$S.T = \frac{(t+1)(2t+1)}{(\nu-1)2^{\nu}}T\left(\int z^{2t+2-\nu}dz((z+1)^{\nu-1} - (z-1)^{\nu-1}\right).$$

Remarque III.

30. Mais, en dévelopant cette formule intégrale, nous aurons:

$$S.T = \frac{(t+2)(2t+1)}{2^{\nu-1}}T\left(\frac{1}{2t+1} + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2.3(2t-1)} + \frac{(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{2.3.4.5(2t-3)} + \&c.\right),$$

& cette sommation est juste, quelques nombres entiers qu'on mette pour les lettres t & ν, en sorte que $\nu < 2t + 2$, ou plutot que ν ne soit pas plus grand que $2t + 2$. Cette somme répond donc au terme général,

$$T = 2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)\ldots\ldots(2t-\nu+3),$$

l'exposant du dernier terme de la progression étant $= t$.

CON-